

Date: / /

(x) , then

قاعدة القوة

" is Constant

قاعدة

a is constant

قاعدة

$\sin x$

$\sec^2 x$

Date: / /

Section (1)

" chapter one "

" مشتقات الدوال "

" المراجعة الأسبوعية للدوال "

* ①: Power Rule قاعدة القوة

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$$

* ②: Constant Rule قاعدة الثابت

$$f(x) = c \text{ where } c \text{ is Constant}$$

$$\therefore f'(x) = 0$$

* ③: Sum / Difference Rule جمع أو طرح الدالتين

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

* ④: Product Rule حاصل ضرب الدالتين

$$[f(x) * g(x)]' = f(x) * g'(x) + g(x) * f'(x)$$

الاشتقاق الأول لـ x في $f(x)$ + x في $f'(x)$ + x في $g'(x)$ + $g(x)$ في $f'(x)$

* ⑤: Quotient Rule حاصل قسمة الدالتين $f(x)/g(x)$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{g(x) * f'(x) - f(x) * g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\frac{\text{الاشتقاق الأول لـ } x \text{ في } f(x) \text{ ضرب } g(x) - f(x) \text{ ضرب } g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Section (1)

Date: / /

"chapter one"

"قواعد التفاضل"

"المقدمات الأساسية للتفاضل"

* ①: Power Rule قاعدة القوى

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$$

* ②: Constant Rule قاعدة الثابت

$$f(x) = c \text{ where } c \text{ is Constant}$$

$$\therefore f'(x) = 0$$

* ③: Sum / Difference Rule: جمع أو طرح الدالتين

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

* ④: Product Rule: حاصل ضرب الدالتين

$$[f(x) * g(x)]' = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

الاشتقاق x مشتقة الدالة + الدالة x مشتقة الدالة

* ⑤: Quotient Rule: حاصل قسمة الدالتين $f(x)/g(x)$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{g(x) * f'(x) - f(x) * g'(x)}{[g(x)]^2}$$

القام x مشتقة البسط - البسط x مشتقة القام
(القام)

* (6) Chain Rule: قاعدة السلسلة

If you have $y = f(g(x))$, then

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dg} \times \frac{dg}{dx}$$

* (7) Exponential Rule: قاعدة الدالة الأسية

$f(x) = a^x$ where 'a' is constant

$$\therefore f'(x) = a^x [\ln(a)]$$

* (8) Logarithmic Rule: قاعدة دالة لوغاريتم

$f(x) = \log_a(x)$ where a is constant

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

* (9) Trigonometric Rule: قاعدة الدوال المثلثية

$$[1] f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$[2] f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$$

$$[3] f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$$

Date: \ \

* (1d) Inverse Trigonometric Rule: $\sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}$

$$(1) f(x) = \sin^{-1}(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(2) f(x) = \cos^{-1}(x) \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(3) f(x) = \tan^{-1}(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \#$$

Examples

eg: $f(x) = \frac{x+C}{x-C}$ (1d) $\rightarrow f'(x) = ?$

$$f'(x) = \frac{(x-C) \cdot 1 - (x+C) \cdot 1}{(x-C)^2} = \frac{x-C-x-C}{(x-C)^2} = \frac{-2C}{(x-C)^2} = f'(x)$$

at $f'(2) = -2$
 $\therefore$ at $x=2$, $f'(2) = -2$

$$\therefore \frac{-2C}{(2-C)^2} = -2$$

$$\therefore -2C = -2(2-C)^2 \Rightarrow C = 4 - 4C + C^2$$

$$\therefore C^2 + 4 = 5C \Rightarrow C^2 - 5C + 4 = 0$$

$$\therefore (C-4)(C-1) = 0$$

$$\therefore \underline{C=4} \text{ or } \underline{C=1}$$

②* إذا كانت $P(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$ فأوجد قيم x حيث $P(x) = 0$

$$P(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x^2+2} = 0$$

$$P'(x) = \frac{(x^2+2) \cdot 2x - (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 4x - 2x^3 - 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2x}{(x^2+2)^2}$$

$$\therefore P'(x) = 0$$

$$\frac{2x}{(x^2+2)^2} = 0 \Rightarrow 2x = 0$$

$$\therefore \underline{x=0} \neq$$

هذه هي قيم x

③* إذا كانت $z = 3x^2 - 7$ ، $y = z^7 + 5$ فأوجد y'

$$\frac{dy}{dz} = 7z^6, \quad \frac{dz}{dx} = 6x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} = 7z^6 \times 6x$$

$$\therefore \underline{\underline{\frac{dy}{dx} = 42z^6 x}} \neq$$

* (4) آو ص مشتقة الأولى للدوال الزمنية :

* (a) $y = (\sin^{-1} \sqrt{x})^3$

كـ < ١

$$\frac{dy}{dx} = 3(\sin^{-1} \sqrt{x})^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

بمنزلة الأس ثم نفاضل دالة $\sin^{-1}$ ثم مشتقة الجذر (١/٢)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(\sin^{-1} \sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}(\sqrt{1-x})} \quad \#$$

مشتقة $\sqrt{x}$ هي $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

قائمة مشتقة (كـ) هي $\left[\frac{\sin^{-1} \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \right]$

* (b) $y = \frac{\sin^{-1} x}{x}$

كـ < ١

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sin^{-1} x \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \sin^{-1} x}{x^2} \quad \#$$

2

$$= \frac{\sec x \tan x}{2\sqrt{1+\sec x}} \quad \#$$

152

$\boxed{\sec x \tan x} \leftarrow \boxed{\sec x}$ जोड़ें $\leftarrow$ (Note)

* Sheet 2 of II

①₂ find y' for all the following:

(a) $y = x \tan^{-1} x^2$, (b) $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

(C) $y = \sqrt{\sin 2x}$

Q.2- $y = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1}$ find $y' = ?$

~~$f(a) = y$~~

$$(\sqrt{x})^2 = x$$

~~(b):~~

① - $y = x^{\sqrt{x}}$ * أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية

الحل

note: if we have $y = f(x)^{g(x)}$ بأنضد $\ln$ للطرفين

$$\therefore \ln y = g(x) \ln f(x) \quad \#$$

ثم نقوم بالاشتقاق

$$\therefore y = x^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln y = \sqrt{x} \ln x$$

(فكروا)

$$\ln f(x) = \ln(x) \quad \therefore \frac{y'}{y} = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{y'}{y} = \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore y' = \underbrace{(y)}_{x^{\sqrt{x}}} \left[\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} \right]$$

$$\therefore y' = x^{\sqrt{x}} \left[\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} \right] \quad \#$$

②: $y = x^4 \cdot 4^x$

ما قبل ضرب بالبرهان
 $\therefore$ الأولى x مشتقة الثانية + الثانية x مشتقة الأولى

$$y' = x^4 \cdot x \ln(4) + 4^x \cdot 4x^3$$

$$\Rightarrow y' = x^5 \ln(4) + 4^x \cdot 4x^3 \quad \#$$

* sheet ②: Find $y' = ?$

①: $\ln y = \tan x$, ②: $y = (\tan x)^{\sin x}$



"ناتج الموال"

* ناتج المالة عنه نقطت و

تكون المالة متصلة إذا تحققت الشروط الثلاثة السابقة و
 ①: إذا كانت المالة معرفة عند نقطة $x=a$ أي لها قيمة

②: أن تكون نهاية المالة و $x \rightarrow a$ وحدة عن x بحيث

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

ان النهاية اليسرى = النهاية اليسرى

③: أن يكون النهاية = قيمة المالة
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \#$

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = f(a)$$

* Example

Date: / /

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \end{cases}$$

$$f(1) = \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \rightarrow (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{1}{2} \rightarrow (2)$$

$$\text{From (1), (2)} \therefore f(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

"الالة غير متصلة"

$$(2) f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ \frac{x^2-1}{x^2-x} & x < 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 2x = 2 \times 1 = 2 \rightarrow (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2 \times 1 = 2 \rightarrow (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x^2-x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x} = \frac{2}{1} = 2 \rightarrow (3)$$

From (1), (2) and (3) then $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ #

$$(3) f(x) = \begin{cases} 5-x & x > 2 \\ ax+7 & x \leq 2 \end{cases}$$

(9) إذا كانت الدالة متصلة في $x=2$ فأوجد قيمة a

$$\therefore f(2) = ax+7 = [2a+7] \rightarrow (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (5-x) = 5-2=3$$

$\therefore$ الدالة متصلة

$$\therefore f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\therefore 3 = 2a+7 \Rightarrow 2a = 3-7 = -4$$

$$\therefore a = -2 \quad \#$$

* Sheet (3) (Home work)

[11] أوجد قيمة k التي تجعل الدالة متصلة في النقطة $x=1$

$$f(x) = \begin{cases} x^7 - 1 & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases}$$

* Section (2) *

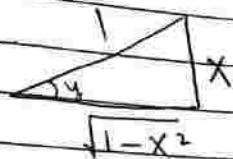
* (1) : $\sin^{-1}(x) = y$

Proof :

$$x = \sin y$$

∴ By differentiation partially

$$1 = \cos y \cdot y' \Rightarrow \frac{1}{\cos y} = y'$$



$$\cos y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1}$$

$$\therefore y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

* (2) : $y = \cos^{-1}(x)$

Proof :

$$\cos(y) = x$$

$$\therefore -\sin(y) \cdot y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sin(y)} = \frac{-1}{x} \cdot \frac{-1}{\cos(y)}$$

$$\cos(y) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1}$$

$$\therefore y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore y = \cos^{-1}(x)$$

$$\therefore y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\sin(x)$

* ①. $y = \tan(x)$

$$= y' = \frac{1}{1+x^2} \quad \#$$

مقام عاقلات التفاضل الى ١

* ①: $y = \tan x + \frac{1}{8} \tan^3 x \Rightarrow y' = \sec^4 x$

Solution

$$y' = \sec^2 x + \frac{1}{8} (3 \tan^2 x \cdot \sec^2 x)$$

$$= \sec^2 x + \tan^2 x \sec^2 x = \sec^2 x \underbrace{(1 + \tan^2 x)}_{\sec^2 x}$$

$$= \sec^2 x [\sec^2 x]$$

$$= \sec^4(x) \quad \#$$

* ②. $y = \sqrt{1 + \sin x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin x}$

Solution

$$y' = \frac{1}{2 \sqrt{1 + \sin x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{2 \sqrt{1 + \sin x}}$$

$$\therefore \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\therefore \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = (\sqrt{1 - \sin x})(\sqrt{1 + \sin x})$$

$$\therefore y' = \frac{(\sqrt{1 - \sin x})(\sqrt{1 + \sin x})}{2 (\sqrt{1 + \sin x})} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin x}$$

#

Date: / /

* (1) $y = \sec(\tan x)$

Solution

let $u = \tan x$
 $\therefore y' = \sec(u) \cdot \tan(u)$

$$y' = \sec(\tan x) \cdot \tan(\tan x) \cdot \sec^2 x$$

#

* (2) $y = x^{\sin x}$

Solution

$$\ln(y) = \sin x \ln(x)$$

$$\frac{y'}{y} = \sin x \cdot \frac{1}{x} + \ln(x) \cdot \cos(x)$$

$$= \frac{\sin x}{x} + \ln(x) \cos(x)$$

$$\therefore y' = y \left[\frac{\sin x}{x} + \ln(x) \cos(x) \right]$$

$$\therefore y' = x^{\sin x} \left[\frac{\sin x}{x} + \ln(x) \cos(x) \right] \quad \#$$

* (3) $x = at^2$, $y = \sin(3x)$ Find $\frac{dy}{dt}$

Solution

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 2at, \quad \frac{dy}{dx} = \cos(3x) \cdot 3 = 3\cos(3x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = 3\cos(3x) \cdot 2at$$

$$\frac{dy}{dt} = 6 \sin(3x)$$

* Try by yourself :-

$$y = (-\sin x)$$

by using logarithm
 باستخدام اللوغاريتم
 قاعدة لوبيتال

تستخدم قاعدة لوبيتال إذا كانت $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \frac{0}{0}$$

∴ By using l'Hopital rule

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 5}{1} = \lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5) = 6 - 5 = 1$$

* Examples :- II :- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^x - 8}{x - 3}$

Solution

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^x - 8}{x - 3} = \frac{2^3 - 8}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

يستخدم قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^x \cdot \ln(2)}{1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} 2^x \ln(2) = 2^3 \ln(2)$$

Date:

$$* (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{3e^{2x} - 1}$$

$$= \frac{(8 \ln(2))}{3} \neq$$

Solution

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{3e^{2x} - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{3e^{2x}} = \frac{1}{3 \cdot e^0} = \frac{1}{3 \times 1} = \frac{1}{3} \neq$$

$$* (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$$

Solution

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{3x^2} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} = \frac{0}{0}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{6} = \frac{-1}{6} \neq$$

$$* (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\cot x}$$

Solution

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\cot(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Date: / /

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right) \cdot (-\sin^2 x) = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot -\sin x \cdot \sin x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{x} \cdot \sin x = (-1) \cdot 0 = 0 //$$

Section (3)

Date: / /

① :- $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+3}}{x+1} & x \neq -1 \\ \frac{1}{2} & x = -1 \end{cases}$

Solution

$$f(-1) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+3}}{(x+1)}$$

بالضرب في مرافق البسط

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+3}}{(x+1)} \times \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+3}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2 - (2x+3)}{(x+1)[\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+3}]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x-1}{(x+1)[\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+3}]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x-1}{(x+1)[\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+3}]} = \frac{-(x+1)}{(x+1)[\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+3}]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+3}} = \frac{-1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore f(-1) \neq \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

الالة غير متصلة عند $x = -1$

زعم تعريف الالة

لي تكون متصلة

عند $x = -1$

$$f(x) = \frac{|x+4|}{x+4} + 3$$

الالة غير معرفة بالناظر

Solution

لا نستطيع الالة

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4} \begin{cases} \frac{(x+4)}{(x+4)} + 3 & x \geq -4 \\ -\frac{(x+4)}{(x+4)} + 3 & x < -4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} = \begin{cases} 4 & x \geq -4 \\ 2 & x < -4 \end{cases}$$

الترتيب غير موجود، بالناظر لا يمكن إعادة تعريف الالة عند $x = -4$ لتصبح متصلة

اجاب ان كل من (الوال الاتي على) لها

$$(i) f(x) = -4$$

متصلة عند جميع قيم $\mathbb{R}$

$$(ii) f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

الالة متصلة على جميع قيم $\mathbb{R}$ ما عدا (1)، (1)

$$\mathbb{R} - \{1\}$$

Date: / /

* اوجد المشتقة الأولى لدوال التالية *

$$\frac{dy}{dx} = ?$$

$$x^2 = 5y^2 + \sin y$$

* Solution *

$$2x = 10y \cdot y' + \cos y \cdot y'$$

$$2x = y' [10y + \cos y]$$

$$\therefore y' = \frac{2x}{10y + \cos y} \quad \#$$

$$\textcircled{1} : y = x^4 \cdot 4^x$$

* Solution *

$$\frac{dy}{dx} = x^4 \cdot (4^x \cdot \ln(4)) + 4^x \cdot 4x^3$$

$$= [4^x \cdot \ln(4) x^4 + 4^x \cdot 4x^3] \quad \#$$

* Sheet ④ :- Find $\frac{dy}{dt}$

$$x = t + \frac{1}{t}, \quad y = \sin^{-1}(x^2)$$

(x-1)³

* أي دالة يصعب التعامل معها إما كان تحويلها لدالة كثيرة حدود لغرضية لفترة تتعامل معها.

بمعنى آخر $\rightarrow$ لو اصبحت نقطة (x_0) دما على اللولب فهو حالة خاصة
عند $x_0 = 0$ و $a = 0$

$$P(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x-x_0)^3 + \dots$$

at $X_0 = 1$ Solution

$$f'''(x) = -e^{-x} \rightarrow f'''(1) = -e^{-1}$$

$$\therefore f(x) = e^{-1} + \frac{-e^{-1}}{1!}(x-1) + \frac{e^{-1}}{2!}(x-1)^2 + \frac{-e^{-1}}{3!}(x-1)^3 + \dots$$

Date: / /

* فنكول ماكلورين يوضع $x_0 = 0$ و $a = 0$

لنقس الحالة أعبر فنكول ماكلورين

$$f(x) = e^{-x}$$

$$f(x_0) = e^{-x_0} \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = -e^{-x} \Rightarrow f'(0) = -e^0 = -1$$

$$f''(x) = -(-e^{-x}) \Rightarrow f''(0) = e^0 = 1$$

$$f'''(x) = -e^{-x} \Rightarrow f'''(0) = e^0 = 1$$

$$\therefore f(x) = 1 + \frac{(-1)}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{(-1)}{3!}x^3 + \dots$$

القانون العام في فنكول ماكلورين

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

* Find Maclaurin series اوجد قسمة ماكلورين

$$f(x) = \cos(x+a) = \cos x \cos a - \sin x \sin a$$

$$f(x) = \cos(x+a) = \cos x \cos a - \sin x \sin a$$

$$\begin{array}{l|l|l} f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l} f(x) = \cos x & f(0) = \cos(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \sin x & f'''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) = \cos x & f^{(4)}(0) = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l} f(x) = -\cos x & f(0) = -1 \\ f'(x) = \sin x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = \cos x & f''(0) = 1 \end{array}$$

Date: / /

$$* f(x) = \cos x \cos a - \sin x \sin a$$

$$= \left[f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \right] \cos(a)$$

$$- \left[f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \right] \sin(a)$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2}x^2 \right] \cos(a) - \left[x - \frac{1}{6}x^3 \right] \sin(a)$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2}x^2 \right] \cos(a) - \left[x - \frac{1}{6}x^3 \right] \sin(a)$$

#

$$* f(x) = e^{\cos x} \Rightarrow \text{Sheet (5) :}$$

$$* f(x) = \sin^2 x$$

Date: / /

التكامل "Integration" التفاضل

* [1] : $\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$

* [2] : $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$

* [3] : $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$

$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln(x)$

$\int \frac{dx}{x+1} = \ln(x+1)$

هذا التكامل هو التكامل اللوغاريتمي

$\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$

* [4] : $\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)}$

* [5] : $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$

* [6] : $\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)}$

* [7] : $\int a^{bx} dx = \frac{a^{bx}}{b \ln(a)}$

Date: / /

تكملة طرقات التواليد المثلثية

* [1] :- $\int \sin x dx = -\cos x$

* [2] :- $\int \cos x dx = \sin x$

* [3] :- $\int \sec^2 x dx = \tan x$

* [4] :- $\int \csc^2 x dx = -\cot x$

* [5] :- $\int \sec x \tan x dx = \sec x$

* [6] :- $\int \csc x \cot x dx = -\csc x$

تكملة طرقات التواليد العكسية

* [1] :- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \text{ or } -\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

* [2] :- $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \text{ or } -\frac{1}{a} \cot^{-1} \frac{x}{a}$

* [3] :- $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{x}{a} \text{ or } -\frac{1}{a} \csc^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

* [4] :- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1}(x) \text{ --- K.S.}$

Find :-

Date: / /

$$I = \int \frac{x^5 + x - 2}{\sqrt{x}} dx$$

Solution

$$I = \int \frac{x^5 + x - 2}{(x)^{1/2}} dx$$

$$= \int [x^5 + x - 2] (x)^{-1/2} dx$$

$$= \int [x^{5/2} + x^{1/2} - 2x^{-1/2}] dx$$

$$= \frac{x^{5/2+1}}{5/2+1} + \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} - 2 \cdot \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1}$$

$$= \frac{x^{7/2}}{7/2} + \frac{x^{3/2}}{3/2} - 2 \frac{x^{1/2}}{1/2}$$

$$= \frac{2}{11} x^{11/2} + \frac{2}{3} x^{3/2} - 4x^{1/2} \quad \#$$

* $I = \int (4x - 5)^{35} dx$

عنه بدعوى تكامل افرم بكون الالة في قسمة

دالة في (بالاستعانة بتابعها)

بضرب التكامل $4x$ و $4x$ بالقسمة على (4)

$$\therefore \frac{1}{4} \int (4x - 5)^{35} \cdot 4 = \frac{1}{4} \frac{(4x - 5)^{36}}{36} \quad \#$$

Date: / /

$$* I = \int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} dx$$

فإن $\frac{1 + \cos x}{x + \sin x} = \frac{d}{dx} \ln(x + \sin x)$

$1 + \cos x$ و $x + \sin x$ متماثلتان

∴ فإن $\ln(x + \sin x)$ هي النتيجة

$$\therefore I = \int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} dx = \ln(x + \sin x) + C$$

قوانين التكامل

$$\therefore \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \rightarrow (1)$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \rightarrow (2) \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$* \int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) dx$$

$$= \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{1}{2} \cos(2x) dx$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2x)}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin(2x) + C$$

Find

$$I = \int \frac{x^5}{x^2 + 1} dx$$

$$I = \int \frac{x^5}{x^2 + 1} dx$$

$$= \int \frac{x^5}{x^2 + 1} dx$$

$$= \int \frac{x^5}{x^2 + 1} dx$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$* I =$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

Date: / /

$$\begin{aligned}
 * \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \, dx \\
 &= \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{1}{2} \cos(2x) \, dx \\
 &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \frac{\sin(2x)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin(2x)}{2} \right] + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \int \tan^2 x \, dx &= \int (\sec^2 x - 1) \, dx \\
 &= \int \sec^2 x \, dx - \int dx \\
 &= \tan x - x + C \quad \#
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \int \sin(ax) \cos(bx) \, dx \\
 = \frac{1}{2} [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \int \sin(ax) \sin(bx) \, dx \\
 = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \int \cos(ax) \cos(bx) \, dx \\
 = \frac{1}{2} [\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ex. 9: } \int \sin(7x) \sin(3x) \, dx \\
 = \frac{1}{2} \int (\cos(7-3)x - \cos(7+3)x) \, dx
 \end{aligned}$$

* طرق التفاضل

١١، التفاضل

المشتق

$$= \frac{1}{2} \int [\cos(4x) - \cos(10x)] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos(4x) dx - \frac{1}{2} \int \cos(10x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin(4x)}{4} - \frac{1}{2} \frac{\sin(10x)}{10}$$

$$= \frac{\sin(4x)}{8} - \frac{\sin(10x)}{20} + C$$

* طرق التكامل (1) : بالتعويض

أ. التعويض (جبري) -

هو عملية تحويل التكامل من شكل صعب إلى شكل بسيط لتكامله.

$$\text{Ex: } \int x(2x^2+1)^5 dx$$

$$\text{let } u = 2x^2 + 1$$

$$\frac{du}{dx} = 4x$$

$$\therefore dx = \frac{du}{4x}$$

$$\therefore \int x(u^5) \cdot \frac{du}{4x} = \frac{1}{4} \int u^5 du = \frac{1}{4} \int u^5 du$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{u^6}{6} \right] + C$$

$$= \frac{1}{24} u^6 + C$$

$$\therefore u = (2x^2+1) \text{ then } I = \frac{1}{24} [2x^2+1]^6 + C$$

* $\int x^3 \cdot \sqrt{x^4+3} \, dx$
 (u = x^4+3)
 - Kine

Date: / /

$\therefore \text{let } u = x^4+3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x^3$

$\therefore dx = \frac{du}{4x^3}$

$\therefore \int x^3 \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{du}{4x^3} = \frac{1}{4} \int \sqrt{u} \, du$

$= \frac{1}{4} \int (u)^{\frac{1}{2}} \, du = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} [u]^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{12} u^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6} u^{\frac{3}{2}} + C$

$\therefore I = \frac{1}{6} [x^4+3]^{\frac{3}{2}} + C \quad \#$

* $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 \frac{dx}{x^2}$

Solution

let $u = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

$\therefore -dx = x^2 du \Rightarrow dx = -x^2 du$

$\therefore \int u^3 \cdot \frac{dx}{x^2} = - \int u^3 \, du = -\frac{1}{4} u^4 + C$

$= -\frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{x}\right]^4 + C \quad \#$

$$* 10) \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$$

$$\text{let } u = \ln x \quad \text{Solution} \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\therefore dx = x du$$

$$\therefore I = \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = \int \frac{\cos(u)}{x} \cdot x du$$

$$= \int \cos(u) du = \sin(u) + C$$

$$\therefore I = \sin(\ln x) + C \#$$

$$* ①) \int \frac{x dx}{\sqrt{x+3}}$$

Solution

$$\text{let } u = \sqrt{x+3} \Rightarrow u^2 = x+3, \quad x = u^2 - 3$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

$$2u du = dx$$

$$\therefore I = \int \frac{x du}{\sqrt{x+3}} = \int \frac{x \cdot 2u du}{u} = \int x \cdot 2 du$$

$$= \int (u^2 - 3)(2) du$$

$$= \int (2u^2 - 6) du = \frac{2}{3} u^3 - 6u + C$$

$$\therefore \frac{2}{3} (\sqrt{x+3})^3 - 6\sqrt{x+3} + C \#$$

$$* \int x \sqrt{2x+1} dx$$

Date: \ /

Solution

$$\text{let } u = \sqrt{2x+1} \Rightarrow u^2 = 2x+1 \Rightarrow 2x = u^2 - 1 \rightarrow \textcircled{1}$$

$$\therefore x = \frac{u^2 - 1}{2}$$

$$\text{From } \textcircled{1} \quad \begin{aligned} dx &= u du \\ dx &= u du \end{aligned}$$

$$\therefore I = \int x \cdot u \cdot u du = \int \left(\frac{u^2 - 1}{2} \right) (u^2) du$$

$$= \int \frac{u^4 - u^2}{2} du$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int u^4 du - \int u^2 du \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^5}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{u^3}{3}$$

$$= \left[\frac{u^5}{10} - \frac{u^3}{6} \right] + C$$

$$\therefore I = \frac{(\sqrt{2x+1})^5}{10} - \frac{(\sqrt{2x+1})^3}{6} + C$$

$$* \int \frac{4x^3}{1+x^8} dx$$

Solution

$$\text{let } x^4 = u \Rightarrow du = 4x^3 dx \therefore dx = \frac{du}{4x^3}$$

$$\therefore I = \int \frac{4x^3}{1+u^2} \cdot \frac{du}{4x^3} = \int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \tan^{-1}(u) + C = [\tan^{-1}(x^4) + C] \#$$

$$* \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

Solution

$$\text{let } \sqrt{x} = u \Rightarrow u^2 = x \Rightarrow dx = 2u du$$

$$\therefore I = \int \frac{\sin u}{u} \cdot 2u du = 2 \int \sin(u) du$$

$$= -2 \cos(u) + C$$

$$\therefore I = -2 \cos(\sqrt{x}) + C \#$$

$$* \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$$

Solution

$$\text{let } \ln x = u \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$\therefore dx = x du$$

$$\therefore I = \int \frac{\sqrt{1+u}}{x} \cdot x du = \int (\sqrt{1+u}) du = \int (1+u)^{\frac{1}{2}} du$$

$$= (1+u)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \boxed{(1+\ln x)^{\frac{3}{2}} + C} \#$$

$$\text{Ans } \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + x^2}$$
$$\sqrt{x^2 - a^2}$$

الكمال. يمكن القاص منه يا تمام القروض والتمويل

11) إذا لم يكن $a^2 - x^2$ قابلاً للقسمة على x فإن

$$x = a \sin \theta, \quad y = a \cos \theta$$

[2] إذا اضربى التكامل على $x^2 - a^2$ فإننا نحصل (أي أنه

$$x = a \sec \theta, \quad x = a \csc \theta$$

3) ادراك ان $\sqrt{x^2 + a^2}$ هو دالة زوجية

$$x = a \tan \theta, \quad x = a \cot \theta$$

* Example :- $\int \frac{x^3 dx}{x^2 - 1}$

* Solution *

* Solution *

$\therefore \text{let } x = a \sec \theta - \sec \theta$
 $dx = \sec \theta \tan \theta d\theta$

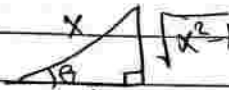
$$\begin{aligned} \text{So } I &= \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec^3 \theta}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}} \cdot \sec \theta \tan \theta d\theta \\ &= \int \frac{\sec^4 \theta}{\tan \theta} \sec \theta \tan \theta d\theta \end{aligned}$$

Date: / /

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{\sec^3 \theta}{\tan \theta} \cdot \sec \theta \tan \theta d\theta \\
 &= \int \sec^4 \theta d\theta \\
 &= \int \sec^2 \theta \cdot \sec^2 \theta d\theta \\
 &= \int (1 + \tan^2 \theta) \sec^2 \theta d\theta = \int \sec^2 \theta + \tan^2 \theta \sec^2 \theta d\theta \\
 &= \int \sec^2 \theta d\theta + \int \tan^2 \theta \sec^2 \theta d\theta \quad \text{Let } u = \tan \theta \\
 &= \tan \theta + \frac{\tan^3 \theta}{3} + C \\
 &= \left[\tan \theta + \frac{1}{3} \tan^3 \theta + C \right] \#
 \end{aligned}$$

Why, find a gain

From $X = a \sec \theta = \sec \theta$



$$X = \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow X \cos \theta = 1 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{X}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore I &= \tan \theta + \frac{1}{3} \tan^3 \theta + C, \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{X^2 - 1}}{1} \\
 &= \left[\sqrt{X^2 - 1} + \frac{1}{3} (\sqrt{X^2 - 1})^3 + C \right] = \sqrt{X^2 - 1} \#
 \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

Date: / /

Solution

المقام يحتوي على $\sqrt{x^2 - 4}$

$$\therefore \text{let } x = a \sec \theta, \quad a = 2$$

$$x = 2 \sec \theta \Rightarrow dx = 2 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$\therefore I = \int \frac{4 \sec^2 \theta}{\sqrt{4 \sec^2 \theta - 4}} \cdot 2 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$= \int \frac{4 \sec^2 \theta}{\sqrt{4(\sec^2 \theta - 1)}} \cdot 2 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$= \int \frac{4 \sec^2 \theta}{\cancel{2} \sqrt{\sec^2 \theta - 1}} \cdot \cancel{2} \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$, \sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$$

$$= \int \frac{4 \sec^2 \theta}{\tan \theta} \cdot \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$= \int 4 \sec^3 \theta d\theta =$$

* Section (5) *

* العمل بالتجزئة *

* [1] :- $\int x e^x dx$

* [Solution] #

$$\text{Let } u = x, \quad dv = e^x dx$$

$$du = dx \quad \rightarrow \quad v = \int e^x dx = e^x$$

$$\therefore I = uv - \int v du = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$$

$$= e^x [x - 1] \#$$

* [2] :- $\int x^3 \ln x dx$

* [Solution] #

$$\text{let } u = \ln x, \quad dv = x^3 dx$$

$$du = \frac{1}{x}, \quad v = \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4$$

$$\therefore I = uv - \int v du$$

$$= \ln x \cdot \frac{1}{4} x^4 - \int \frac{1}{4} x^4 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{4} \ln x x^4 - \int \frac{1}{4} x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4}$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 = \frac{1}{4} x^4 \left[\ln x - \frac{1}{4} \right] \#$$

* [3] :- $\int x (\ln x)^2 dx$

* [Solution] #

$$\text{let } u = (\ln x)^2$$

$$dv = x dx$$

$$du = 2(\ln x) - \frac{1}{x} dx, \quad v = \int x dx = \frac{1}{2} x^2$$

Date: / /

$$\therefore I = uv - \int v du = (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{2} x^2 - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \left(2(\ln x) - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$I = \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^2 - \int x^2 (\ln x) dx \rightarrow \textcircled{*}$$

let $u = \ln x, dv = x dx$

$$du = \frac{1}{x} dx, \quad v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore I = uv - \int v du = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2$$

in $\textcircled{*}$

$$I = \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^2 - \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 \right]$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 (\ln x)^2 - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 \right] \#$$

$$= \frac{1}{4} x^2 \#$$

* $\int x^3 \tan^{-1} x dx$

Solution #

let $u = \tan^{-1}(x), \quad du = \frac{1}{1+x^2} dx$

$$v = \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4$$

أحمد بن محمد

Date: 11

$$I = uv - \int v du$$

$$I = \tan^{-1}(x) \cdot \frac{1}{4} x^4 - \int \frac{1}{4} x^4 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$I = \tan^{-1}(x) \cdot \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{4} \int \frac{x^4}{1+x^2} dx$$

$$\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$$

طريقة القسمة

$$\begin{array}{r} x^2+1 \overline{) x^4} \\ \underline{-x^4-x^2} \\ x^2 \end{array}$$

$$\therefore \int \frac{x^4}{1+x^2} = \int \frac{-x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

المعبر عنه
 المتبقي
 الجزئية
 بالشور

$$= \int x^2 - \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

Sheet

$$du =$$

$$\therefore I =$$

$$\text{let } u$$

$$du$$

$$\therefore I =$$

$$\text{in } (\pm)$$

$$I = \frac{1}{2}$$

$$=$$

$$\int x^2$$

Section (6)

Date: / /

الأعداد المركبة

Complex numbers
عددي

الأعداد المركبة

قاعدة العدد المركب انه لا يوجد $\sqrt{-1}$ $\Rightarrow$ $i = \sqrt{-1}$

$$\sqrt{-1} = i \Rightarrow i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

"القاعدة تقسم أس i على 4
والباقي هو الأس (كما يدعى)"

$$i^5 = i^2 \cdot i^3 = (-1)(-i) = i$$

$$i^6 = i^3 \cdot i^3 = (-i)(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i = i^3$$

* هو عدد يكون فيه جزء حقيقي وجزء تخيلي ونقول بالعدد المركب $\mathbb{C}$

$$Z = x + iy$$

عددي مركب

* كتابة جمع وطرح (العدد المركب)

$$Z_1 = x_1 + iy_1, Z_2 = x_2 + iy_2$$

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

النتيجة مع الحقيقي والتخيلي مع
التخيلي

Date:

وكانت النتيجة

$$\begin{aligned}
 z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\
 &= x_1x_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) - y_1y_2 \quad (i^2 = -1)
 \end{aligned}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \quad \#$$

* التي على الصورة (x, y) كل من الأعداد x و y عدد حقيقي

$$[1]: z_1 = 5 + 4i \quad (x, y) = (5, 4)$$

$$[2]: z_2 = 8 \quad (x, y) = (8, 0) \quad \#$$

* Example: Find: $i^{25} = i \Rightarrow$ 4 في 25 فنتيجة
 من 24 هو 24 فنتيجة 1

$$\begin{aligned}
 i^1 &= i \quad \# \\
 (2) i^{99} &= i^3 = -i \quad \# \quad 96 \div 4 = 24 \quad \#
 \end{aligned}$$

* Solve: $z_1 = 8 + 2i, z_2 = 5 - 4i$
 $z_1 \cdot z_2 = ?$

$$(8 + 2i)(5 - 4i) = 40 - 32i + 10i - 8i^2, i^2 = -1$$

$$40 - 22i + 8 = 48 - 22i \quad \#$$

* Solve: $z_1 = 3 + 2i, z_2 = 5 - i$

$$\begin{aligned}
 2z_1 + 3z_2 &= ? \quad 2(3 + 2i) + 3(5 - i) \\
 &= 6 + 4i + 15 - 3i = 21 + i \quad \#
 \end{aligned}$$

Date: / /

* فرق اول (عددان) $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ #

* لعدد x, y $5x + 1 - 4i = 6 + (y + 2)i$

Solution

بمساوي (مقياس الحقيقة، الحقيقة القابلة)

$$5x + 1 = 6 \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$-4i = (y + 2)i \Rightarrow -4 = y + 2$$

$$\Rightarrow y = -4 - 2 = -6 \Rightarrow \boxed{y = -6} \#$$

Find:

$$(1+i)^2 + (1-i)^2$$

Solution

$$1 + 2i + i^2 + 1 - 2i + i^2 = 1 + 1 - 1 - 1 = 2 - 2 = \text{Zero} \#$$

$$* (3 - 2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$$

$$(3 - 2i)^2 = 3 \times 3 - 2 \times 3 \times 2i + 2i \times 2i$$

$$= 9 - 12i + 4i^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$$

* للعدين $a + bi$ مرافقه $\bar{z} = a - bi$

$$z = x + iy \quad \text{العدد} \quad \bar{z} = x - iy$$

$$z = 4 - 3i \Rightarrow \bar{z} = 4 + 3i \#$$

Date: / /

* $Z = 3 + 2i \Rightarrow \bar{Z} = 3 - 2i$ #

* مواضع (اعداد) مترافقان :

(1)° $Z + \bar{Z} = x + iy + x - iy = 2x$

(2)° $Z \cdot \bar{Z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2$ #

(3)° $Z_1 + Z_2 = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$ (6) $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ #

(4)° $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2$ #

(5)° $\begin{pmatrix} \bar{Z}_1 \\ \bar{Z}_2 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}}$ #

$a = \frac{7-i}{2-i}, b = \frac{13-i}{4+i}$ * اذا ورس

اقتبان (العددان) a, b مترافقان :

Solution :

$a = \frac{7-i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = \frac{14+7i-2i-i^2}{4-i^2} = \frac{14+5i+1}{5} = \frac{15+5i}{5}$
 $= \frac{5(3+i)}{5} \Rightarrow \boxed{a = 3+i}$ #

$b = \frac{13-i}{4+i} \times \frac{4-i}{4-i} = \frac{52-13i-4i+i^2}{16-i^2} = \frac{52-17i-1}{17}$
 $= \frac{51-17i}{17} = \frac{17(3-i)}{17}$
 $\boxed{b = 3-i}$

* (العددان) a, b مترافقان :

اذا ورس (مترافقان)

$3Z_1 - 4Z_2$ اذا ورس $Z_1 = 2+i, Z_2 = 3-2i$

$3Z_1 - 4Z_2 = 3(2+i) - 4(3-2i) = 6+3i-12+8i$

$\therefore |3Z_1 - 4Z_2| = \sqrt{(-6)^2 + (11)^2} = \sqrt{36+121} = \sqrt{157}$ #

* find :

* (3)

(3)

العددان

$Z =$

$Z =$

Date: / /

المسألة: أوجد الصورة القطبية للعدد المركب $z = 2 + 2\sqrt{3}i$

Find $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ = Solution $2 + 2\sqrt{3}i$ (i)

$$r = \sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

في الصورة القطبية $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$z = r[\cos \theta + i \sin \theta]$$

$$= 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \#$$

$$z = r e^{i\theta} = 4 e^{i\frac{\pi}{3}} \#$$

في الصورة الأسيية

$$z = -3i$$
 (ii)

Solution

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{0}\right) = \frac{\pi}{2}$$

(صورة القطبية)

$$z = r[\cos \theta + i \sin \theta] = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$z = 3 e^{i\frac{\pi}{2}} \#$$

في الصورة الأسيية

Date: / /

* اوجد المقياس والمزاوية لكل من -

(i): $\frac{1}{4+3i}$

Solution

$$\frac{1}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{4-3i}{16-9i^2} = \frac{4-3i}{16+9} = \frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$$

المقياس
أو $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{25}\right)^2 + \left(\frac{3}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{625} + \frac{9}{625}}$

$$= \sqrt{\frac{25}{625}} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

أو $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-3 \times 25}{4}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right) = \boxed{}$

(ii): $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 = \left(\frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^3 = \left(\frac{2i}{2}\right)^3$
 $= \left(\frac{2i}{2}\right)^3 = i^3 = -i \neq$

ارعدوا لوالدي بالرحمة والمغفرة

عن زينة محمد

Section (7)

Date: / /

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

① اوجد حاصل ضرب المصفوفات (النتيجة)

إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى = عدد صفوف المصفوفة الثانية

$$\begin{bmatrix} 1x-1+3x2 & 1x0+3x1 \\ 2x-1+4x2 & 2x0+4x1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x1+1x-3+3x1 & 2x2+1x0+3x3 & 2x1+1x1+3x3 \\ -1x1+(3x-3)+0x1 & -1x2+3x0+0x3 & -1x1+3x1+0x3 \\ 4x1+2x-3+(-1x1) & 4x2+2x0+(-1x3) & 4x1+2x1+(-1x3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 13 & 12 \\ -10 & -2 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1(9-16) - 3(3-4) + 3(4-3) \\ = -7 - 3(-1) + 3(1) \\ = -7 + 3 + 3 = \boxed{-1}$$

to get

adj(A) $\rightarrow$

$$\text{let } A = C = \begin{bmatrix} + & - & + \\ 1 & 3 & 3 \\ - & + & - \\ 1 & 3 & 4 \\ + & - & + \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

cofactor matrix

$$C = \begin{bmatrix} + & - & + \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ - & + & - \\ \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ + & - & + \\ \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} (9-16) & -(3-4) & (4-3) \\ -(9-12) & (3-3) & -(4-3) \\ (12-9) & -(4-3) & (3-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

نقلنا المصفوفة الآتية والآن نكتبها

$$C^T = \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -7 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \#$$

هذا هو مقلوب
المصفوفة A

حل نظام المعادلات الخطية باستخدام المصفوفة

١) $4x + 2y - z = 5$, $3x - y - z = 2$, $x + y - z = 2$

نكتب المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$$

نحسب محدد المصفوفة

$$\therefore |A| = 4(1+1) - 2(-3+1) + (-1)(3+1)$$

$$= 8 + 4 - 4 = 8 \Rightarrow |A| = 8$$

$$\text{Let } A = F = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c|c} + & - & + \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -1 \end{array} & \begin{array}{c|c|c} - & + & - \\ \hline 3 & -1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -1 \end{array} & \begin{array}{c|c|c} + & - & + \\ \hline 3 & -1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -1 \end{array} \\ \begin{array}{c|c|c} - & + & - \\ \hline 2 & -1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -1 \end{array} & \begin{array}{c|c|c} + & - & - \\ \hline 4 & -1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -1 \end{array} & \begin{array}{c|c|c} - & + & - \\ \hline 4 & 2 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 \end{array} \\ \begin{array}{c|c|c} + & - & + \\ \hline 2 & -1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -1 \end{array} & \begin{array}{c|c|c} - & + & - \\ \hline 4 & -1 & -1 \\ \hline 3 & -1 & -1 \end{array} & \begin{array}{c|c|c} + & - & + \\ \hline 4 & 2 & -1 \\ \hline 3 & -1 & -1 \end{array} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} (1+1) & -(-3+1) & (3+1) \\ -(-2+1) & (-4+1) & -(4-2) \\ (-2-1) & -(-4+3) & (-4-6) \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

$$F^T = \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 10 + 2 - 0 \\ 10 - 6 + 0 \\ 20 - 4 + 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x = \frac{1}{8} \times 12 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

$$y = \frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}} \neq$$

$$z = \frac{1}{8} [16] = 2 \Rightarrow \boxed{z = 2} \neq$$



3loom team

By: Bassant Ibrahim

∴ هذه هي الجذور

إذا طلب هذه الجذور الجذور على الصورة القطبية

$$\therefore Z = r^{1/n} [e^{i(\theta + 2k\pi)}] \quad \# \text{ وهكذا}$$

$$Z_1 = (4\sqrt{2})^{1/5} [e^{i(0)}], \quad Z_2 = (4\sqrt{2})^{1/5} [e^{i(2\pi)}] \quad \# \text{ وهكذا}$$

* (وجد الجذرين التربيعيين للمقدار $-1 + i$)

$$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}(-1) = -45$$

$$= -45 + 180 = 135 = \frac{135\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$$

$$z^{1/n} = r^{1/n} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right]$$

$$z^{1/2} = r^{1/2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{2k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{2k\pi}{2}\right) \right]$$

at $k=0$

$$z_1^{1/2} = (\sqrt{2})^{1/2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + 0\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4} + 0\right) \right]$$

$$z_1 = (\sqrt{2})^{1/2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \right]$$

at $k=1$

$$z_2 = (\sqrt{2})^{1/2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi\right) \right]$$

$$z_2 = (\sqrt{2})^{1/2} \left[\cos\left(\frac{11\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{8}\right) \right] \#$$

$$\textcircled{1} x^6 - 1 = 0$$

Sol

$$x^6 = 1$$

∴ اكتب على 6 جذور

$$r=1, \theta=0$$

at $k=0$

$$z_1 = (1)^{1/6} [\cos(0) + i \sin(0)]$$

$$z_2 = (1)^{1/6} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) \right] = \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]$$

cos

* اوجد $\cos^4 \theta$ بدلالة $\sin$ باستخدام الصيغ الزاوية

الحل

$$z = \cos \theta + i \sin \theta = z \rightarrow (1)$$

$$\bar{z} = \cos \theta - i \sin \theta = \frac{1}{z} \rightarrow (2)$$

بالجمع طرفي المعادلتين $\cos \theta$ والطرح فتعطينا $\sin \theta$

$$\therefore 2 \cos \theta = z + \frac{1}{z} \rightarrow (3)$$

بتطبيق
نظرية دي موير

$$2 \cos n \theta = z^n + \frac{1}{z^n} \rightarrow (4)$$

$$\therefore 2 i \sin \theta = z - \frac{1}{z} \Rightarrow 2 i \sin n \theta = z^n - \frac{1}{z^n} \rightarrow (5)$$

فتابع $\cos^4 \theta$

نستخدم قانون $\cos \theta$

$$\therefore 2 \cos \theta = z + \frac{1}{z} \Rightarrow (2 \cos \theta)^4 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^4$$

بإستخدام نظرية ذات (كوت) $\binom{n}{r}$

$$\therefore 16 \cos^4 \theta = z^4 \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^0 + 4C_1 z^3 \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^1 + 4C_2 z^2 \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^2 + 4C_3 z^1 \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^3 + 4C_4 z^0 \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^4$$

$$= z^4 + 4 \cdot \frac{z^3}{z} + 6 \frac{z^2}{z^2} + 4 z \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4}$$

الآن

$$= z^4 + 4z^2 + 6 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4}$$

$$\therefore 16 \cos^4 \theta = \left(z^4 + \frac{1}{z^4} \right) + 4 \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + 6$$

From (4)

$$\therefore 16 \cos^4 \theta = (2 \cos 4\theta) + 4(2 \cos(2\theta)) + 6$$

$$\therefore \cos^4 \theta = \frac{1}{16} [2 \cos(4\theta) + 4(2 \cos(2\theta)) + 6]$$

$$= \frac{1}{8} \cos(4\theta) + \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{3}{8}$$

$$\therefore \cos^4 \theta = \frac{1}{8} [\cos(4\theta) + 4 \cos(2\theta) + 3] \quad \#$$

أوجد قيمته عند $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\textcircled{1} |A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \times 7 - 2 \times 8 = 35 - 16 = 19$$

$$\textcircled{2} A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)[+2-4] - 2[-2-4] + 2[4+4]$$

$$= (-1)(-2) - 2[-6] + 2[8]$$

$$= 2 + 12 + 16 = 30 \quad \#$$

الاجابة

$$\textcircled{1} 3x + 2$$

2

let Δ

الماتريكس Δ هو الماتريكس الذي

Δ

الماتريكس Δ هو الماتريكس الذي

* باستخدام المعادلات أو من المعادلات

$$\textcircled{1}: 3x + 2y + 8z = 38, \quad x + 3y + 9z = 37, \quad x + y + z = 15$$

معادلات x, y, z

$$\text{let } \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(3-9) - 2(1-9) + 8(1-3)$$

$$= 3(-6) - 2(-8) + 8(-2)$$

$$= -18 + 16 - 16 = -18$$

$$\therefore \Delta = \boxed{-18}$$

كيف معادلات x

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 38 & 2 & 8 \\ 37 & 3 & 9 \\ 15 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 38(3-9) - 2(9 \times 15 - 37)$$

$$+ 8(37 - 3 \times 15)$$

$$= 38(-6) - 2(30 - 37) + 8(37 - 45)$$

$$= -228 - 2(-7) + 8(-8)$$

$$= -278 \#$$

$$\boxed{\Delta_x = -278}$$

كيف Δ_y

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 38 & 8 \\ 1 & 37 & 9 \\ 1 & 15 & 1 \end{vmatrix} =$$

النتيجة

$$3(37 - 9 \times 15) - 38(1 - 9) + 8(15 - 37) \\ = -166 \quad \Rightarrow \Delta y = -166 \quad \#$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 38 \\ 1 & 3 & 37 \\ 1 & 1 & 15 \end{vmatrix} = 3(3 \times 15 - 37) - 2(15 - 37) + 38(1) \\ = 1 + 8$$

$$\Delta z = -8$$

للوصول إلى x, y, z

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-278}{-18} = \frac{278}{18} = \frac{139}{9}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-166}{-18} = \frac{83}{9}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-8}{-18} = \frac{4}{9} \quad \#$$

* Sheet 8

أوجد إقليدس والزاوية لكل من

$$① \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \right)^0$$

② أوجد (بني، الخاصية الواسع، صحيح

③ أوجد جذور المعادلة

$$x^4 + i = 0$$

الأنقى

الأنقى

* اوجد $\sin^4 \theta$ بدلالة النسب المثلثية لخطأحات الزاوية θ

* اوجد قيمته العددية :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

عبراً عن استخدام المحددات اوجد حل المعادلات الآتية

① $x + 2y + 2z = 6$, $2x + 4y + z = 7$, $3x + 2y + 9z = 04$

② $4x + 2y - z = 5$, $3x - y + z = -2$, $x + y - z = 0$

"قل رب زدني علماً"

ادعوا لوالدي بالرحمة والعقرة

ويسألونك عن الروح قل الروح من أمر ربي وما أوتيتم من العلم إلا قليلاً



3loom team

By: Bassant Ibrahim

القطع الناقص

الدليل في الصورة

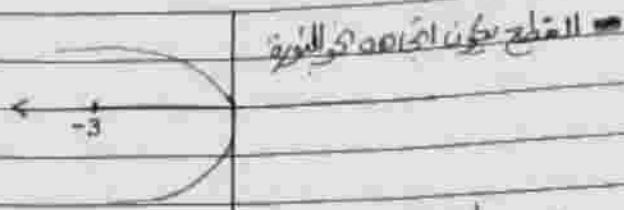
المحاور من القطع في النقطة الأصل $(0,0)$

محاور معلوماتية يطلب بحالة



الرأس $(0,0)$ ، البؤرة $(-3,0)$

الحل



القطع يكون اتجاهه هو البؤرة

$$y^2 = -4px$$

المعادلة هي

عندئذ في الدخام الب

ممكن اتجاه القطع كما في الصورة ويكون البؤرة في x أو y على المحاور التي تقع البؤرة

$$\therefore y^2 = -4px$$

$$P(-3,0) = (p,0)$$

$$\therefore p = -3$$

$$\therefore y^2 = -4(-3)x \Rightarrow |y^2 = 12x|$$

الرأس $(0,0)$ ، البؤرة $(0,2)$

الحل

البؤرة $(0,2)$ ، ولكن في الاتجاه y هو محور



$$\therefore (0,2) = (0,p)$$

$$\therefore p = 2$$

$$\therefore x^2 = 4py =$$

$$x^2 = 4 \cdot 2y \Rightarrow |x^2 = 8y|$$

Date: / /

2. إيجاد المعادلات للمقطع الناقص :-

أوجد معادلة القطع الناقص الذي رؤساه $(2, 4)$ و $(2, -2)$ وقوساه $(2, 5)$ و $(2, -3)$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$h = 2$$

$$k = 2$$

$$a = 4$$

$$b = 3$$



∴ لإيجاد المركز $h = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$

$$h = 2$$

$$k = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{5 + (-3)}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$$

∴ المركز هو $(h, k) \leftarrow (2, 1)$

∴ المحور الأكبر هو y ∴ $(y) = 2a$ من العلاقة بين رؤسها

$$5 - (-3) = 2a \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a^2 = 16$$

∴ المحور الأصغر هو x ∴ $2c = 4 - (-2)$

$$2c = 6 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow c^2 = 9$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7$$

$$\therefore b = \sqrt{7}$$

• القطع الناقص •

Date: / /

• بعض معلومات ويطب المعادلة

• أوجد معادلة القطع الناقص في الحالات الآتية:
الرأسان في الموضعين $(0, \pm 5)$ والبؤرتان $(\pm 4, 0)$

كل c :
طال الرأسان والبؤرتان يقعان على محور x

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a = ?$
 $b = ?$ أم $c = ?$
عناصر

$$a^2 = b^2 + c^2$$

البؤرة
 $a = 5 \Rightarrow a^2 = 25$, $c^2 = 16 = 4^2$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$$

المعادلة هي:
 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

• الرأسان في الموضعين $(0, \pm 5)$ والبؤرتان $(0, \pm 3)$
كل c :

الرأسان على محور y والبؤرتان على محور y

$$\therefore a = 5 \Rightarrow a^2 = 25$$

البؤرة $c = 3 \Rightarrow c^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 9 = 16$

المعادلة هي:
 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

$$\frac{(x-2)^2}{7} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

we have

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

$$h=6, k=-3, a^2=16 \Rightarrow a=4$$

$$b^2=9 \Rightarrow b=3$$

$$C = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

$$(6, -3) \Rightarrow (h, k)$$

المركز

ب

المحاور

$$(h \pm b, k)$$

$$(h, k \pm a)$$

$$(h, k + C)$$

$$(6, -3 \pm 4)$$

$$(6, -3 \pm \sqrt{7})$$

$$(6 \pm 3, -3)$$

$$(6, -3 \pm \sqrt{7})$$

$$(6 \pm 3, -3)$$

$$(6, -3 \pm \sqrt{7})$$

$$(6 \pm 3, -3)$$

$$(9, -3)$$

$$(3, -3)$$

$$(9, -3)$$

$$(3, -3)$$

الدائرة هي مشتركة فالدوائر هي متطابقة

وإن كانا غير متطابقتين فالدوائر هي متطابقة

طوعاً ولفظاً

عزیزہ

$$P(-\frac{7}{8}, 4)$$

Date: / /

$$x = -\frac{7}{8}$$

معادلة الدليل هي

نقطة

ملاحظ: لا تضرب البؤرة انماها (او مرسومة على z و 3 في ربع
المعادلة في اتجاه الدليل #
آعلى اتجاه البؤرة).

اذا لم يكن رأس القطع في نقطة الأصل $(0,0)$ اي عند النقطة (h,k)

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

استخدامها

اذا كان القطع مرسوما حول محور x ولكن نقطة
ليست نقطة الأصل

رأس القطع (h, k)
البؤرة $(h+p, k)$

معادلة الدليل هي $(-p+h)$

معادلة المحور $y=k$

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

اذا كان مرسوما حول محور y

رأس القطع (h, k)

البؤرة $(h, p+k)$

معادلة الدليل $(-p+k)$

معادلة المحور $x=h$

$$(y+1)^2 = 4(x-2)$$

من المعطاة

اوجد رأس القطع، البؤرة، معادلة الدليل

الحل

$$(h, k) = (2, -1) \quad (k = -1) \rightarrow -k = 1 \rightarrow -x = -2 \rightarrow x = 2$$

Date:

$$(-1+p, q) = (h+p, k)$$

بالنقطة

$$4p=4 \Rightarrow p=1$$

~~(1, 2)~~

$$(1+2, 2)$$

النقطة هي

$$F(3, 1)$$

$$y=k$$

$$y=-1$$

معادلة الخط

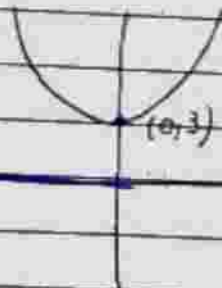
$$x=1$$

$$p+h=1+2=3$$

نقطة

$$1 = V(0, 3), F(0, 1)$$

نقطة التقاطع بين المحاور



$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

هذه هي المعادلة

$$h=0, k=3$$

$$(x-0)^2 = 4p(y-3) \Rightarrow x^2 = 4p(y-3)$$

$$4p=1 \Rightarrow p=\frac{1}{4}$$

$$x^2 = (y-3)$$

المركزية في المصفوفة $(0, 10)$ و $c = 8$ ضلوع المركز $\frac{4}{5}$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{نكتب}$$

$$a = 10 \Rightarrow a^2 = 100$$

المركزية $c = 8$

$$e = \frac{c}{a}$$

الاضلاع المركز

$$\frac{4}{5} = \frac{c}{10} \Rightarrow c = \frac{40}{5} = 8$$

$$c^2 = 64 \quad c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow x$$

$$b^2 = 64 - a^2$$

$$b^2 = 100 - 64 = 36$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$$

المقطع الناقص اذا كانت $a > b$ المركز $(0, 10)$ $\frac{4}{5}$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

الصورة القياسية

$$h = ? \quad k = ? \quad a = ? \quad b = ? \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

لا تكبر $a > b$

المحاور = المحاور الاكبر الاكبر

$$\begin{array}{ccc} x = h & (h, k) & y = x \\ y = k & & y = 2a \\ \text{نقطة} & \text{نقطة} & \text{نقطة} \\ (h \pm c, k) & (h \pm a, k) & (h, k \pm b) \end{array}$$

$$x = -\frac{7}{3}$$

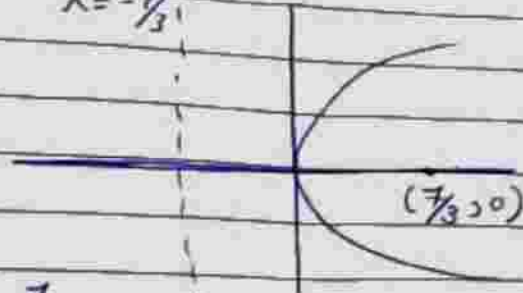
Date: / /

الرأس (0,0) ، معادلة المليل
او معادلة القطع لثا

اتجاه المليل يكون عكس اتجاه البؤرة دائما

$$x = -\frac{7}{3}$$

$$x = -\frac{7}{3}$$



$$y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4 \cdot \frac{7}{3} x$$

$$\Rightarrow \boxed{y^2 = \frac{28}{3} x} \#$$

الرأس (0,0) ، معادلة المليل

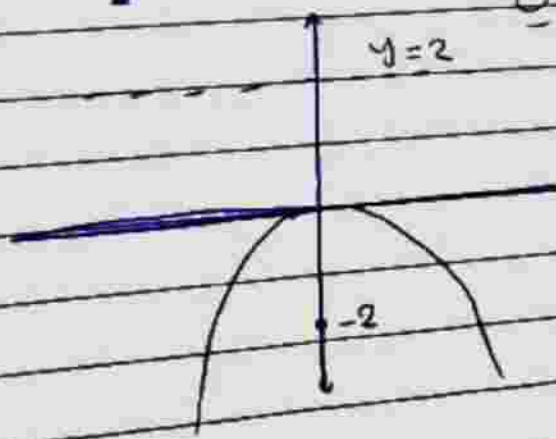
او معادلة القطع ؟

كل

$$y = 2$$

معادلة المليل

وكذلك عكس البؤرة



$$x^2 = -4py$$

$$x^2 = -4 \cdot 2y = -8y$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 = -8y} \#$$

$$4(x'+h)^2 + (y'+k)^2 - 16(x'+h) + 6(y'+k) + 9 = 0$$

$$4(x'^2 + 2x'h + h^2) + y'^2 + 2y'k + k^2 - 16x' - 16h + 6y' + 6k + 9 = 0$$

$$4x'^2 + 8x'h + 4h^2 + y'^2 + 2y'k + k^2 - 16x' - 16h + 6y' + 6k + 9 = 0$$

$$4x'^2 + y'^2 + (8h - 16)x' + (2k + 6)y' + 4h^2 + k^2 - 16h + 6k + 9 = 0$$

بما ان $x' = x$ و $y' = y$ فنعوض في المعادلة
 فنحصل على: $4x^2 + y^2 + (8h - 16)x + (2k + 6)y + 4h^2 + k^2 - 16h + 6k + 9 = 0$

$$\therefore 8h - 16 = 0 \Rightarrow h = 2, \quad 2k + 6 = 0 \Rightarrow k = -3$$

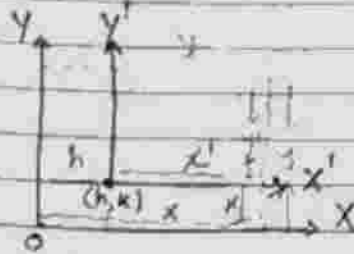
... بالتعويض في المعادلة

$$\therefore 4x'^2 + y'^2 + 4(2)^2 + (-3)^2 - 16(2) + 6(-3) + 9 = 0$$

$$4x'^2 + y'^2 + 16 + 9 - 32 - 18 + 9 = 0$$

$$4x'^2 + y'^2 - 16 = 0 \Rightarrow \boxed{4x'^2 + y'^2 = 16}$$

Section (6)



نقل نقطة المركز

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \Rightarrow$$

معادلات نقل المحاور

أصبح المعادلة (كروية المنتهية):

$$\phi(x, y) = x^2 + 10xy + y^2 - 6x + 18y - 7 = 0$$

عندما ينقل المحاور موازتين للمحاور الأصلية للنقطة $(-2, 1)$

$$\begin{aligned} x &= x' + h & \text{حيث } h = -2 \\ y &= y' + k & \text{حيث } k = 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 1 \end{cases}$$

$$\text{let } \phi(x, y) = (x' - 2)^2 + 10(x' - 2)(y' + 1) + (y' + 1)^2 - 6(x' - 2) + 18(y' + 1) - 7 = 0$$

$$\begin{aligned} x'^2 - 4x' + 4 + 10x'y' + 10x' - 20y' - 20 + y'^2 + 2y' + 1 \\ - 6x' + 12 + 18y' + 18 - 7 = 0 \end{aligned}$$

$$|x'^2 + y'^2 + 10x'y' + 8 = 0| \rightarrow \text{هذه هي المعادلة (كروية)}$$

اضوف حدود المربع الثاني في المعادلة (عند حذف الحدود الأولى لنستطيع ان نقل المحاور)

$$4x^2 + y^2 - 16x + 6y + 9 = 0$$

$$\text{let } x = x' + h, \quad y = y' + k$$

خطوة معادلة القطع المكافئ افقي ونطلب معلوماته
في كل مسألة لاجابة سؤال ومعادلة التليد

$$[1] \quad 3x^2 - 24y = 0$$

$$3x^2 - 24y = 0 \Rightarrow 3x^2 = 24y \Rightarrow x^2 = 8y$$

∴ سوف نستخدم معادلة y معلومة بالاول
ونفرض اننا نعلمه فوجدنا

(0,2)

∴ p=2

From the equation

معادلة التليد

$$\therefore x^2 = 4py$$

بمقارنة المعادلتين

$$4p = 8 \Rightarrow [p = 2]$$

المرتبطة = 2

$$\therefore p(0,2) \#$$

معادلة التليد هي $y = -2$ لانها ستكون عكس اتجاه
البؤرة

$$[2] \quad 2y^2 + 7x = 0$$

كأنه

$$2y^2 + 7x = 0 \Rightarrow 2y^2 = -7x \Rightarrow y^2 = -\frac{7}{2}x$$

∴ رسم القطع المكافئ يكون في اتجاه x لانها معلومة بالاول

$$\therefore y^2 = -4px$$

$$\therefore y^2 = -4px \text{ و } -4p = -\frac{7}{2} \therefore p = \frac{-1}{2}$$

$$[p = -\frac{7}{8}]$$

$$\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

Date: / /

مثال ①

$$h, k, a, b = ?, c = ?$$

أوجد مركزه

$$\frac{(x-h)^2}{36} + \frac{(y+k)^2}{9} = 1$$

$$\therefore \boxed{h=3} \rightarrow \boxed{k=-1}$$

$$a^2 = 36 \rightarrow a = 6, b^2 = 9 \rightarrow b = 3$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{25} = 5$$

٣. الاتجاه : لتحديد اتجاه القطع منبه عنه a و b أي $a > b$ or $b > a$

$$a > b$$

في اتجاه x أو y هو الاتجاه الذي تقع



$$(3, -1)$$

$$(h, k)$$

مركزه

البؤرتان c

الرأسان a

الرأسان b

$$(3 \pm 5, -1)$$

$$(3 \pm 6, -1)$$

$$(3, -1 \pm 3)$$

$$F_1(8, -1)$$

$$V_1(9, -1)$$

$$(3, 2)$$

$$F_2(-2, -1)$$

$$V_2(-3, -1)$$

$$(3, -4)$$

$$\underline{\underline{2c}} = \text{البحر لافوق}$$